Evaluación de la calidad educativa de la provincia de Buenos Aires

Tercera serie de documentos

Matemática 9º año

5

Informe de resultados

Operativo 2001

Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires

Dirección Provincial de Planeamiento y Evaluación de la Calidad Educativa

Tercera serie de documentos

Matemática
9º año 5

Informe de resultados

Operativo 2001

Director General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires
Mario N. Oporto

Directora Provincial de Planeamiento y Evaluación de la Calidad Educativa
María del Carmen Feijoó

Directora del Programa de Evaluación de la Calidad Educativa
Graciela Gil

Subdirectora de Coordinación Operativa
Martha S. Spotti

Responsable del texto
Omar Malet

Equipo Técnico de Matemática
Omar Malet (coordinador)
Liliana Pujadas - Graciela Padula

Edición
Laura Malena Kornfeld

Diseño gráfico
Juan Livingston - Martín Rossi

1. Introducción

Este documento tiene como propósitos informar acerca de los resultados generales obtenidos por los alumnos de Noveno Año de los distritos de San Fernando y Tigre en el Segundo Operativo Provincial de Evaluación de la Calidad Educativa, realizado en julio de 2001, y hacer avances en el análisis de dichos resultados.

El tratamiento de los datos relevados se ha orientado a reconocer tendencias generales, identificar logros y dificultades, problematizarlos, hipotetizar acerca de los procesos que los sustentan y explorar posibles alternativas de superación.

Cada escuela podrá analizar sus propios resultados inscribiéndolos en el contexto de las tendencias generales; en efecto, los resultados globales constituyen una referencia adecuada para contrastar los resultados efectivamente obtenidos por cada sección en particular –a condición de tener en cuenta que las tendencias generales y los resultados particulares pueden diferir–.

Cabe recordar que los alumnos evaluados en 2001, cuando cursaban Noveno Año, también fueron evaluados en 1999, cuando cursaban Séptimo Año; y que en aquel momento fueron evaluados los alumnos que entonces cursaban Noveno Año.

Sin duda, poner en relación los resultados 1999 (de los cuales cada escuela dispone) con los resultados 2001 (que ahora entregamos), puede contribuir a enriquecer el proceso de análisis y de toma de decisiones pedagógicas a nivel institucional. No obstante, corresponde llamar la atención acerca de la prudencia con que esas relaciones deben manejarse; ello, por la multiplicidad y la complejidad de los factores que pueden explicar los resultados logrados por los alumnos en una y otra instancia (entre otros, las características de los propios instrumentos administrados).

En informes posteriores profundizaremos en el análisis de resultados desde la doble perspectiva del *progreso* de los alumnos y de las *variables contextuales* que muestran mayor incidencia sobre los niveles de logro. Habrá entonces oportunidad de que cada escuela realice nuevas miradas sobre sus resultados.

Por último, es necesario advertir que el presente documento se desarrolla de modo solidario con los restantes que conforman la Tercera Serie, cuya lectura se considera imprescindible para una correcta interpretación de los datos.

En cuanto a la estructura del documento, éste contiene:

a) Un análisis de los resultados obtenidos por los alumnos en cada uno de los ejes y las dimensiones evaluados.

b) Un análisis de las respuestas de los alumnos a ciertos ítems particulares, especialmente útiles para hacer una lectura didáctica de los resultados.

c) La identificación de los principales logros y dificultades de los alumnos.

d) Consideraciones finales respecto del sentido del documento y de las posibilidades que ofrece el sistema de evaluación bonaerense.

2. Resultados obtenidos por los alumnos en los ejes y dimensiones evaluados

- La presentación de los resultados se organiza en torno de las dos perspectivas que articulan las pruebas del área: los ejes curriculares y las dimensiones.

  En consecuencia, está referida a grupos de ítems, y no a ítems aislados, por lo que una reflexión centrada en ella puede permitir a los docentes orientar y reorientar sus intervenciones en direcciones más significativas que las que puede sugerir cada ítem en particular (sin perjuicio de que también aportemos datos sobre el desempeño de los alumnos en algunos ítems).

- Los resultados se presentan en términos de porcentajes de respuestas correctas, por constituir éstos un indicador del grado de dificultad de un agrupamiento de ítems o de un ítem.

  Un agrupamiento o un ítem al que muchos alumnos respondieron correctamente tiene un alto porcentaje de respuestas correctas, que indica que los alumnos encontraron un bajo grado de dificultad en resolver las situaciones propuestas. En cambio, un agrupamiento o un ítem al que pocos alumnos respondieron bien tiene un bajo porcentaje de respuestas correctas, que expresa un alto grado de dificultad en la resolución de esas situaciones.

  Por ejemplo: el hecho de que el porcentaje de respuestas correctas al eje Nociones geométricas sea de 42,5 % y al eje Nociones de Estadística y Probabilidad sea de 32,2 %, indica que los alumnos pudieron resolver más exitosamente –con menor dificultad– los ítems propuestos para el primer eje, y que, en cambio, encontraron mayores dificultades en la resolución de los ítems elegidos para el eje Nociones de Estadística y Probabilidad.

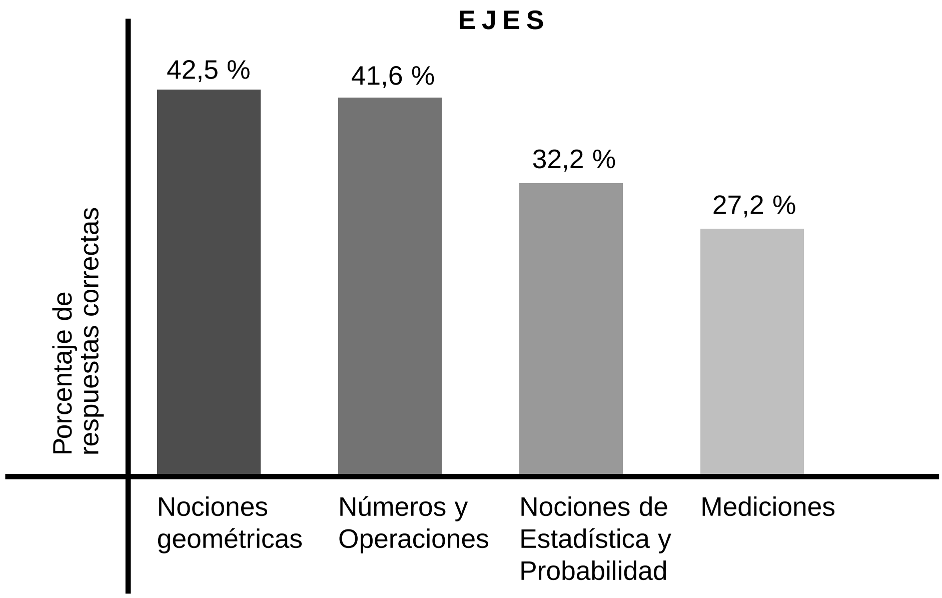
  Es preciso alertar acerca de dos lecturas incorrectas de esos datos: no es correcto afirmar que los alumnos hayan aprendido el 42,5 % de los contenidos de Nociones geométricas y el 32,2 % de los de Nociones de Estadística y Probabilidad; tampoco, que "saben más" de Nociones geométricas que de Nociones de Estadística y Probabilidad.

  Ambos porcentajes son indicativos del grado de dificultad que ofrecieron los ítems de uno y otro agrupamiento, a partir de expresar cuántas respuestas correctas recibieron en conjunto.

- Por otra parte, los porcentajes de respuestas correctas a ítems o agrupamientos no deben ser interpretados como expresión definitiva de las posibilidades de los alumnos al llegar a una meta, sino como expresión de sus logros y dificultades en la resolución de actividades puntuales que les son propuestas **en un momento particular de su proceso de aprendizaje**.

Los criterios técnicos de elaboración y selección de tales actividades legitiman el propósito de profundizar en las concepciones, los razonamientos, los procedimientos, las hipótesis y las relaciones que las respuestas de los alumnos ponen en evidencia, para precisar el rumbo didáctico, fortalecer o cambiar las estrategias metodológicas habitualmente puestas en juego, o iniciar nuevas acciones...

2.1. Resultados por ejes curriculares



Mayor porcentaje de respuestas correctas (menor grado de dificultad) ↕ Menor porcentaje de respuestas correctas (mayor grado de dificultad)	1. Nociones geométricas 2. Números y Operaciones 3. Nociones de Estadística y Probabilidad 4. Mediciones

- Los ejes Nociones geométricas (Transformaciones en el plano, Polígonos, Cuerpos) y Números y Operaciones (Números enteros, Números racionales, Lenguajes coloquial, gráfico y simbólico, Proporcionalidad) presentan porcentajes de respuestas correctas muy similares, y superiores a los de los otros dos ejes.

  Son datos auspiciosos que el rendimiento de los alumnos en geometría alcance niveles no inferiores a los de aritmética, y que el eje Nociones geométricas sea el que recibe mayor porcentaje de respuestas correctas (independientemente de cuántos y cuáles sean los logros pendientes –en éste y en los demás ejes–).

Quizá esta tendencia dé cuenta de una progresiva (y justa) revalorización de la geometría, una rama habitualmente descuidada y hasta olvidada frente a la aritmética y el álgebra, de tratamiento generalmente más cuidadoso e intenso.

- El porcentaje de respuestas correctas al eje Nociones de Estadística y Probabilidad (Frecuencias, media aritmética, moda, Combinatoria simple, Probabilidad: equiprobabilidad) es 10,3 puntos inferior al de Nociones geométricas y 9,4 puntos inferior al de Números y Operaciones.
- El eje Mediciones (Perímetro y Área, Volumen) es el que presenta mayor grado de dificultad. El porcentaje de respuestas correctas correspondiente al eje Mediciones está 5 puntos por debajo del de Nociones de Estadística y Probabilidad, 14,4 puntos por debajo del de Números y Operaciones, y 15,3 puntos por debajo del de Nociones geométricas.
- Aunque los porcentajes de respuestas correctas a los ejes Nociones de Estadística y Probabilidad y Mediciones no presentan diferencias extremas, algunos indicadores parecen sugerir que son aun más preocupantes los pobres rendimientos en Mediciones que los rendimientos en Estadística y Probabilidad.

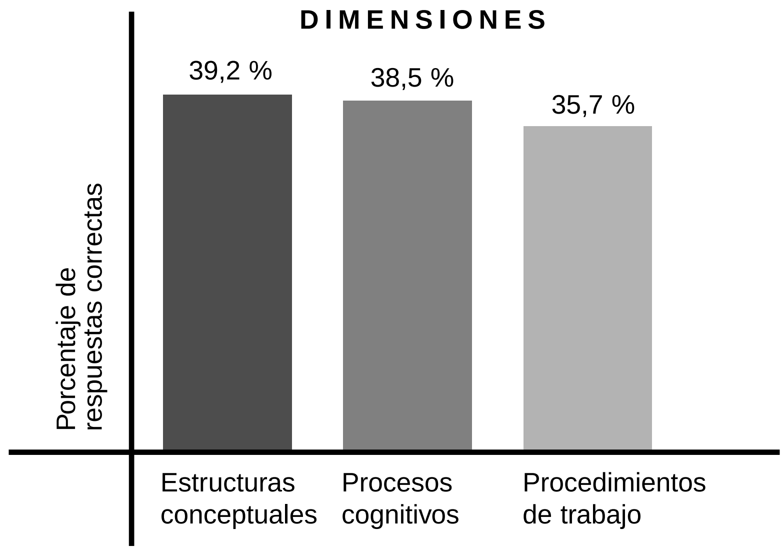
  En primer lugar, los contenidos del eje Mediciones son contenidos tradicionales en el Área de Matemática; en cambio, muchos de los contenidos del eje Nociones de Estadística y Probabilidad, y el eje en sí, son relativamente novedosos, y los docentes están haciendo camino en la búsqueda de las secuencias y las estrategias más adecuadas para su enseñanza en el ámbito de la Educación General Básica.

  En segundo lugar, mientras que el eje Mediciones está presente a través de los tres ciclos, el tratamiento de los nuevos contenidos de estadística y probabilidad suele ser todavía débil en Primer y Segundo Ciclo, y se enfatiza recién en el Tercer Ciclo. Es probable, pues, que los alumnos evaluados hayan participado de recorridos didácticos relativamente breves al momento de la evaluación en lo que hace a estos temas.

  En tercer lugar, en las evaluaciones de agosto de 1999 el eje Mediciones fue el que mayor grado de dificultad presentó, tanto en Séptimo como en Noveno Año (los alumnos que obtuvieron los resultados en los cuales se centra este documento, estaban entonces en Séptimo Año). Si bien este dato debe ser considerado con prudencia (ya que los resultados 1999 no son estadísticamente comparables con los resultados 2001), podría estar señalando una tendencia persistente.

  Estas observaciones invitan a prestar especial atención a los resultados obtenidos por los alumnos en Mediciones.

2.2. Resultados por dimensiones



Mayor porcentaje de respuestas correctas (menor grado de dificultad) ↕ Menor porcentaje de respuestas correctas (mayor grado de dificultad)	1. Estructuras conceptuales 2. Procesos cognitivos 3. Procedimientos de trabajo

- Las dimensiones Estructuras conceptuales y Procesos cognitivos presentan grados de dificultad semejantes, y ligeramente menores que el grado de dificultad de la dimensión Procedimientos de trabajo.

  Recordemos que:

  - La dimensión Estructuras conceptuales evalúa los datos/hechos, los conceptos y las redes de conceptos matemáticos de los que los alumnos disponen en el área.
  - La dimensión Procesos cognitivos está centrada en los procesos de razonamiento matemático y de comunicación en lenguajes matemáticos.
  - La dimensión Procedimientos de trabajo evalúa las técnicas y estrategias de trabajo propias del quehacer matemático.

- El mayor grado de dificultad se registra en la dimensión Procedimientos de trabajo. El porcentaje de respuestas correctas en esta dimensión está 3,5 puntos por debajo del de Estructuras conceptuales, y 2,8 puntos por debajo del de Procesos cognitivos.

- ¿Qué hipótesis pueden explicar estas tendencias?

  Tradicionalmente, la escuela suele priorizar el aspecto conceptual de los contenidos.

  Por otra parte, durante el Tercer Ciclo suelen merecer particular consideración los procesos de razonamiento (que apelan a las incipientes herramientas del pensamiento lógico formal) y de comunicación y traducción (en tanto en este ciclo se avanza decididamente en dirección al álgebra y sus códigos).

  Tal vez estos dos sesgos configuran un escenario en el cual los rendimientos en Estructuras conceptuales y Procesos cognitivos superan –ligeramente– al rendimiento en Procedimientos de trabajo.

2.3. Conclusiones

- La diferencia de grado de dificultad entre el eje que resulta más fácil (Nociones geométricas) y el que resulta más difícil (Mediciones) es de 15,3 puntos.
- En cambio, la diferencia de grado de dificultad entre la dimensión que resulta más fácil (Estructuras conceptuales) y la que resulta más difícil (Procedimientos de trabajo) es de sólo 3,5 puntos.
- Estos guarismos podrían estar indicando que la implementación efectiva del curriculum tiende a resultar más equilibrada desde el punto de vista de las dimensiones que desde el punto de vista de los ejes.

  En otras palabras, como los rendimientos difieren más entre ejes que entre dimensiones, cabría inferir que los procesos de enseñanza están siendo significativamente más eficaces en ciertos ejes (Números y Operaciones, Nociones geométricas) que en otros (Nociones de Estadística y Probabilidad, Mediciones), y casi igualmente eficaces en las tres dimensiones (con independencia de cuánto les falte aprender a los alumnos, lo que han aprendido, lo han aprendido integrando las tres dimensiones).
- ¿Cómo procurar incidir pedagógicamente del modo más efectivo posible sobre el estado de situación que los resultados ponen de manifiesto? ¿A qué prioridades atender?

  Estos interrogantes admiten y requieren una doble respuesta:

  - Por un lado, para intentar equilibrar más el desempeño de los alumnos en las diferentes dimensiones, y, particularmente, en los distintos ejes, vale la pena repensar si las intervenciones docentes se articulan adecuadamente con las necesidades y dificultades específicas de los alumnos en cada dimensión y en cada eje.

Por ejemplo, el tiempo que se destina a las capacidades de cada dimensión y a los contenidos de cada eje, y las estrategias metodológicas que se utilizan al abordarlos, se pueden regular para dar mejor respuesta a las problemáticas que los alumnos presentan.

- Por otro lado, para apuntar a mejorar los niveles de desempeño de los alumnos en todos los ejes y en todas las dimensiones, parece conveniente revisar críticamente el enfoque didáctico general del área.

  El hecho de que los resultados en los distintos ejes y en las distintas dimensiones estén, todos, por debajo del 50 % (y por encima del 25 %, topes que delimitan una banda relativamente angosta), sugiere que dependen fuertemente del enfoque general y no sólo de acentos específicos en uno u otro eje, o en una u otra dimensión (sin negar las particularidades de unos y otras).

  Recordemos que las pruebas responden a un modelo de enseñanza de la Matemática centrado en la construcción de los conocimientos por parte de los alumnos a través de la resolución de problemas, modelo que expresa las opciones curriculares jurisdiccionales para el área, y que desarrollamos en el documento **Las pruebas de Matemática. Marco referencial.**

3. Análisis de respuestas de los alumnos

Este apartado está centrado en el análisis "en clave didáctica" de las respuestas de los alumnos a ciertos ítems.

Los ítems seleccionados se distribuyen entre los cuatro ejes considerados; fueron elegidos entre los que recibieron mayor porcentaje de respuestas correctas, y también entre los que presentaron mayor grado de dificultad.

Para cada uno de los ítems seleccionados, consignamos:

- en qué eje y en qué dimensión se inscribe,
- qué evalúa,
- cómo se distribuyen las respuestas de los alumnos entre las distintas alternativas de respuesta,
- por qué distractores se inclinan prevalentemente los alumnos que no eligen la respuesta correcta,
- qué concepciones erróneas, o qué modos incorrectos de pensar o de proceder, pueden haberlos llevado a elegir esos distractores.

El criterio con que los distractores fueron construidos –su lógica– orienta la formulación de hipótesis acerca de los errores de los alumnos.

Tales hipótesis tienen el carácter de aproximaciones tentativas a las redes de conceptos, a los procesos y a los procedimientos puestos en juego por los alumnos en la resolución de los ítems; caracterizan errores *posibles,* sin desconocer ni negar otros abordajes erróneos también posibles.

1

Miguel, Luis y Pedro conformaron la terna finalista de un juego de preguntas y respuestas. Se registró con un signo (+) la cantidad de puntos ganada al responder correctamente una pregunta y con un signo (–) la cantidad de puntos perdida al contestar equivocadamente. Ganaba el juego el que obtenía el mayor puntaje.

Estos fueron los registros de cada uno de los chicos:

Miguel: + 50; – 20; + 30; – 60

Luis: + 50; + 20; – 30; – 60

Pedro: – 50; – 20; + 30; + 60

Entonces

a) ganó Miguel.
b) ganó Luis.
c) ganó Pedro.
d) empataron Luis y Pedro.

Este ítem evalúa si los alumnos son capaces de usar números enteros en contextos significativos.

Se inscribe en el eje Números y Operaciones, y en la dimensión Estructuras conceptuales.

Es el ítem del eje que recibió mayor porcentaje de respuestas correctas.

Opta por la respuesta correcta (*opción c*) el 73,5 % de los alumnos.

Se inclina por el *distractor a* el 5,5 % de los alumnos, por el *distractor b,* el 6 %, y por el *distractor d,* el 14 % (en este ítem, como en los demás, el porcentaje que resta para llegar a 100 % una vez sumados los porcentajes correspondientes a las cuatro opciones es el porcentaje de alumnos que no respondieron, que señalaron dos o más opciones, etc.).

Los puntajes de los tres chicos al terminar el juego son:

Miguel	0
Luis	- 20
Pedro	+ 20

El distractor más tentador, la *opción d,* hace referencia al empate entre Luis y Pedro, quienes en realidad obtuvieron puntajes opuestos (es decir: puntajes que presentan el mismo módulo o valor absoluto, y signos contrarios).

Al menos dos hipótesis pueden contribuir a explicar este error:

a) En algunas aulas, los números enteros son introducidos como meros números naturales precedidos de signos + o – (además del cero), sin problematizar suficientemente sus relaciones con los números naturales.

Esta presentación soslaya la índole conceptual de los números enteros, y alienta en los alumnos ideas tales como que en – 20 o en + 20 el número (el "verdadero" número, lo que cuenta e importa) es 20, mientras que el signo es una suerte de apéndice sin mayor importancia; de ahí que los puntajes – 20 y + 20 sean equiparados y que se concluya que entre Luis y Pedro hubo empate.

En otras palabras: esta perspectiva (superficial, pero frecuente), que pone mayor énfasis en la *representación escrita* de un número entero, en los símbolos que se utilizan para ello, que en el *concepto* de número entero, puede generar la idea errónea de que – 20 o + 20 constan de signo y de "número"; es decir, el carácter de número se le adjudica sólo al 20, y no al – 20 o al + 20.

En realidad, el 20 es el módulo o valor absoluto de ambos números enteros (– 20 y + 20), e indica la distancia entre cualquiera de ellos y el cero.

Por otra parte, más allá de las relaciones entre sus representaciones simbólicas, – 20 queda definido por su relación conceptual con 20, o + 20: – 20 es el opuesto de + 20, o sea, (+ 20) + (– 20) = 0.

Para determinar el módulo o valor absoluto de un número entero, los alumnos suelen utilizar una regla o receta que revela este modo de concebir a los números enteros: *el módulo o valor absoluto de un número entero es el número sin el signo...* La ambigüedad de la palabra "número" que a la vez designa al número entero y a uno de los símbolos usados para representarlo, puede estar en la base del error que comentamos.

b) Pero el error puede ser explicado desde una segunda hipótesis.

Las "reglas de los signos" que regulan las operaciones elementales entre números enteros son mucho más fácilmente traducibles a formatos simples, memorizables mecánicamente, en el caso de la multiplicación (o de la división), que en el caso de la suma (o de la resta).

Casi cualquier persona que haya pasado por la escuela secundaria recuerda aquello de "más por más es más", "más por menos es menos", etc.

La mayor permeabilidad a la mecanización de la regla de los signos de la multiplicación, suele conducir a los alumnos a aplicarla incluso a la suma y a la resta.

Desde esta óptica –errónea–, los módulos o valores absolutos de los puntajes de Luis y de Pedro coinciden con los de las sumas de sus puntajes (en ambos casos, 20); mientras que los signos de dichos puntajes resultan de aplicar la regla de los signos de la multiplicación: en el caso de Luis, más por más es más, más por menos es menos, menos por menos es más; en el caso de Pedro, menos por menos es más, más por más es más, más por más es más; en síntesis, ¡Luis y Pedro empataron!

Por último: es alto el porcentaje de alumnos que opta por la respuesta correcta. Quizá este hecho sea solidario con las modalidades de presentación de los números enteros que desde hace varios años vienen adoptándose en la mayoría de las aulas.

En las décadas del setenta y del ochenta, los números enteros solían introducirse formalmente por la vía que sucintamente describimos a continuación:

a) En N_0 x N_0 (siendo N_0 la unión del conjunto N de los números naturales con el conjunto formado por el cero), se define la relación: $(a;b) \sim (c;d) \Leftrightarrow a + d = b + c$.

b) Se demuestra que esta relación es una relación de equivalencia.

c) Se identifica cada una de las clases de equivalencia inducidas por esa relación con un número entero; por ejemplo, la clase de equivalencia formada por los pares ordenados (3;5), (10;12), (108;110) [1], etc., define un número entero (todos esos pares ordenados son equivalentes entre sí porque si sumamos la primera componente de uno de ellos con la segunda de otro, obtenemos el mismo resultado que si sumamos las otras componentes de esos mismos pares; por ejemplo, (3;5) y (10;12) son equivalentes porque 3 + 12 = 5 + 10).

d) A los números enteros definidos por clases en las que el primer elemento de cada par es mayor que el segundo se los llama *números enteros positivos.*

Se los representa por medio del número natural que expresa la diferencia entre ambos elementos (el primero menos el segundo), precedido de un signo +. Así, el número entero definido por la clase a la que pertenece (6;2) es + 4.

e) A los números enteros definidos por clases en las que el primer elemento de cada par es menor que el segundo se los llama *números enteros negativos.*

Se los representa por medio del número natural que expresa la diferencia entre ambos elementos (el segundo menos el primero), precedido de un signo –. Así, el número entero definido por la clase a la que pertenece (2;6) es – 4.

f) Al número entero definido por la clase en la que el primer elemento de cada par es igual al segundo, se lo llama *cero,* y se lo representa por medio del símbolo usual 0.

La vía que acabamos de caracterizar, matemáticamente inobjetable, no necesariamente es la más pertinente desde el punto de vista didáctico. Cuando los números enteros se introducían de esta manera, los alumnos tendían a refugiarse en colecciones de reglas arbitrarias y sin sentido, pero más amigables que la formalidad de los conceptos y el tecnicismo del lenguaje que el lector habrá advertido en los párrafos precedentes (o quizá recordado al leerlos). La consecuencia: errores muy frecuentes tanto en la interpretación de los números enteros como en los cálculos con ellos (aun, en los más básicos).

---

[1] En general, (**a**; **a** + 2), siendo **a** un elemento de N_0.

Hoy en día, la noción de número entero se introduce en contextos que la vuelven más significativa (en el caso del ítem, el contexto de un juego de preguntas y respuestas), y en los cuales la intuición juega a favor del aprendizaje. Se trata de contextos centrados en puntajes a favor y en contra en un juego, temperaturas sobre y bajo cero, posiciones sobre y bajo el nivel del mar, fechas posteriores y anteriores a una fecha de referencia, depósitos y extracciones de dinero, etc.

En cierto sentido, desde los setentas u ochentas hasta ahora, ha cambiado la pregunta a la que de hecho se da respuesta con la enseñanza de los números enteros: esa pregunta ya no es tanto *qué son los números enteros,* sino más bien *para qué sirven.* El porcentaje de respuestas correctas a este ítem tal vez sea un indicador de que estamos caminando en una dirección correcta.

(En el documento **Las pruebas de Matemática. Marco referencial** hemos hecho referencia a ciertos mitos que es necesario revisar en el Área de Matemática, y a la construcción del sentido del conocimiento matemático; volver sobre ese documento puede enriquecer estos comentarios sobre la enseñanza de los números enteros y sobre sus resultados).

4

Las autoridades sanitarias de "Aguas Blancas" anunciaron que las $\frac{3}{5}$ partes de la población se vacunó contra el dengue. ¿Cuál es el porcentaje de vacunados?

a) El 0,6 %.
b) El 6 %.
c) El 60 %.
d) El dato disponible no permite averiguarlo.

Este ítem pertenece al eje Números y Operaciones y a la dimensión Estructuras conceptuales.

Es uno de los ítems del eje que recibió menor porcentaje de respuestas correctas: opta por la respuesta correcta (*opción c*) el 33 % de los alumnos, mientras que el 23,5 % se inclina por el *distractor a,* el 16,5 % lo hace por el *distractor b,* y también el 23,5 % lo hace por el *distractor d.*

El ítem evalúa si los alumnos son capaces de identificar el porcentaje asociado a una fracción dada –en el contexto de una situación concreta–.

El dato con que se cuenta para ello es que las $\frac{3}{5}$ partes de la población de "Aguas Blancas" se vacunó contra el dengue (la fracción relaciona un subconjunto con el conjunto discreto de objetos del cual es parte; en el documento **Guía de lectura de los resultados y orientaciones para el trabajo institucional** nos hemos ocupado de los múltiples significados del concepto de fracción: Subárea de una región unitaria, Subconjunto de un conjunto discreto de objetos, Punto de una recta numérica, Resultado de una división, Herramienta para comparar dos medidas o dos conjuntos, Probabilidad).

Aquel dato puede ser interpretado en términos de que 3 de cada 5 habitantes recibieron la vacuna, es decir, puede ser interpretado como una relación entre la cantidad de vacunados y la cantidad de habitantes de "Aguas Blancas" (sin que se conozcan ni la una ni la otra: no sabemos cuántos fueron los vacunados, ni cuántos habitantes tiene "Aguas Blancas").

Ahora bien: en términos relacionales, la expresión "3 habitantes de cada 5" es equivalente a "6 habitantes de cada 10", y también a "60 habitantes de cada 100", ya que:

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{60}{100}$$

(las tres fracciones son equivalentes).

Por lo tanto, la fracción $\frac{3}{5}$ se corresponde con un porcentaje de 60 %.

El porcentaje de respuestas correctas que mereció el ítem es llamativamente bajo, sobre todo si se tiene en cuenta que la fracción dato es una fracción convertible en fracción decimal, cualidad que facilita la conversión a porcentaje por la vía de construir una fracción equivalente a la dada cuyo denominador sea 100 (de paso, notemos el papel central que la equivalencia de fracciones juega en esta conversión).

Los *distractores a* y *d* son los que mayores porcentajes de respuestas incorrectas concentran.

El número que presenta el *distractor a* (0,6) se corresponde con el desarrollo decimal de la fracción $\frac{3}{5}$, que se obtiene efectuando el cociente entre 3 y 5. Como la conversión de fracciones en expresiones decimales es una práctica usual en las escuelas, es probable que muchos alumnos, desconcertados por la pregunta, hayan apelado erróneamente a ella para seleccionar la respuesta.

En cuanto a los alumnos que optan por el *distractor d,* parecen considerar que no hay relación alguna entre fracciones y porcentajes, y que no hay traducción posible entre unas y otros.

Como señalan Dickson, Brown y Gibson[2], *los porcentajes* (periódicos) *suponen un tercer método de representación de los números racionales;* los otros dos son las fracciones y las expresiones decimales (periódicas). Así, la fracción $\frac{3}{5}$, la expresión decimal 0,6 y el porcentaje 60 % representan al mismo número racional[3].

[2] Dickson, L.; Brown, M.; Gibson, O. (1984). *El aprendizaje de las matemáticas.* Barcelona, Ministerio de Educación y Ciencia/Labor, 1991.

[3] Téngase en cuenta que la expresión decimal 0,6 y el porcentaje 60 % son periódicos: en ambos casos, el período es cero.

Veamos este otro ítem:

2

La fracción $\frac{8}{5}$ se puede escribir también en forma de número decimal.
¿A cuál de los siguientes números decimales es equivalente $\frac{8}{5}$?

a) 0,625
b) 1,6
c) 5,8
d) 8,5

El ítem, que también se inscribe en el eje Números y Operaciones y en la dimensión Estructuras conceptuales, evalúa si los alumnos son capaces de reconocer la expresión decimal que corresponde a una fracción.

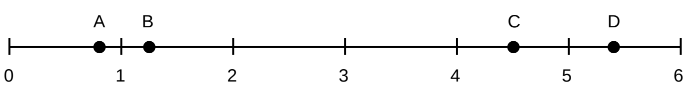
Opta por la respuesta correcta (*opción b*) el 49 % de los alumnos. Este porcentaje, superior en 16 puntos porcentuales al porcentaje de respuestas correctas al ítem anterior, parece sugerir que la traducción fracción → expresión decimal resulta más sencilla para los alumnos que la traducción fracción → porcentaje.

El 32 % de los alumnos evaluados considera que la fracción $\frac{8}{5}$ se traduce como 8,5; es decir, opta por el *distractor d* (el más elegido), en el que la fracción es erróneamente convertida en expresión decimal reinterpretando la línea de fracción como coma decimal.

Tiene valor didáctico recordar, aunque sea tangencialmente, la distribución de las respuestas que los alumnos dieron a un ítem afín en abril de 1999, cuando se encontraban en Séptimo Año:

4

En la recta numérica representada se han ubicado los puntos A, B, C y D. ¿Cuál de ellos corresponde a la fracción $\frac{4}{5}$?



- El punto A ◯ 1
- El punto B ◯ 2
- El punto C ◯ 3
- El punto D ◯ 4

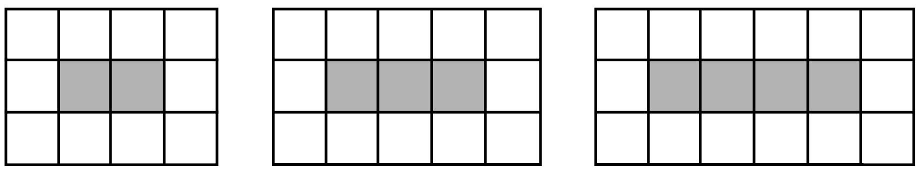
En aquella oportunidad, sólo el 7 % de los alumnos eligió la *opción a* (la respuesta correcta: $\frac{4}{5}$ = 0,8), mientras que el 69 % optó por el *distractor c* ($\frac{4}{5}$ = 4,5). Invitamos al lector a reflexionar acerca de las relaciones entre los resultados 1999 y 2001, y a explorar hipótesis que las expliquen.

Retomando el hilo conductor del análisis: sin duda, para facilitar la resolución de situaciones como las que proponen los ítems que estamos comentando, vale la pena desarrollar en los alumnos tanto la capacidad de traducir entre los tres códigos numéricos aludidos (fracción, expresión decimal, porcentaje), como la flexibilidad necesaria para expresar datos y resultados en uno o en otro, según convenga.

Algunos de los contenidos que suelen abordarse en Noveno Año (razones, proporciones, escalas, probabilidades, frecuencias estadísticas, etc.) pueden dar pie a esta línea de trabajo; en consecuencia, adherir a ella no implica renunciar a avanzar en el tratamiento de la propuesta curricular.

12

Las figuras muestran el tipo de decorado que Don Manuel hace a los embaldosados que coloca.



Si las baldosas grises fueran 100, ¿cuál sería el número de baldosas blancas?

a) 202
b) 204
c) 206
d) No se puede determinar.

El ítem que comentamos corresponde al eje Números y Operaciones y a la dimensión Procesos cognitivos, y es el que recibió menor porcentaje de respuestas correctas entre los ítems del eje.

Evalúa si los alumnos, a partir de una secuencia de dibujos, son capaces de descubrir la regularidad que permite anticipar las propiedades de un término avanzado de la secuencia: se muestran los embaldosados que llevan 2, 3 y 4 baldosas grises, y se pregunta por la cantidad de baldosas blancas que acompañan a 100 baldosas grises.

Sólo el 21 % de los alumnos selecciona la respuesta correcta (*opción c*). En cambio, el 14 % escoge el *distractor a.* El 15 % opta por *b* y el 46,5 % lo hace por *d,* distractor que atrae a más del doble de alumnos que la propia respuesta correcta.

La resolución del ítem pone en juego uno de los procesos esenciales del razonamiento matemático: la *generalización,* o sea, la capacidad de llegar a conclusiones, propiedades o resultados generales a partir de la observación, el análisis o la verificación de casos particulares.

Concretamente: para resolver el ítem, los alumnos deben pasar de una colección de casos particulares (los embaldosados que llevan 2, 3 y 4 baldosas grises) a una propiedad común (la relación entre el número de baldosas grises y el de baldosas blancas), y reinvertir o aplicar esta propiedad a otro caso particular (el embaldosado que lleva 100 baldosas grises).

¿Por qué preguntamos por el embaldosado en el que intervienen 100 baldosas grises, y no, por ejemplo, por el que lleva 5 o 6 de esas baldosas?

Si la pregunta estuviera referida a un embaldosado relativamente pequeño, los alumnos podrían responderla "construyendo" efectivamente ese embaldosado –dibujándolo– y contando la cantidad de baldosas blancas que requiere. Obviamente, para dibujar el embaldosado también es necesario detectar la regularidad de la que participa; pero en este caso es suficiente "actuar" la regularidad, ponerla en juego implícitamente en la acción de dibujar. En cambio, ante la presión de la dificultad, o, al menos, la incomodidad, que supone dibujar un embaldosado con 100 baldosas grises, se vuelve útil (si no, indispensable) conceptualizar o formular la regularidad, hacerla explícita, ponerla en palabras, en diálogo entre uno mismo y la situación planteada.

En síntesis, en el caso del ítem que analizamos, la generalización tiene tres componentes:

a) *Percibir la regularidad.*

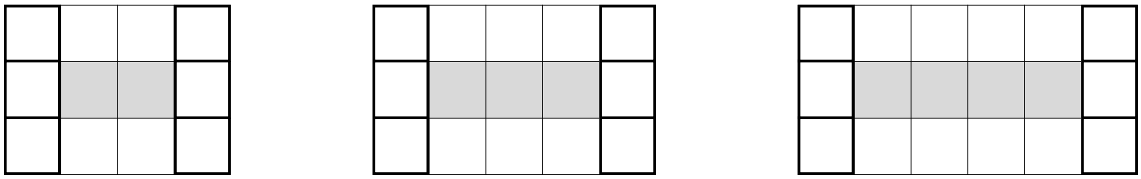
Esta percepción es tanto visual como intelectual, y consiste en un proceso activo e "inteligente" de observación, de exploración de semejanzas y diferencias, de discriminación entre lo que es propio y particular de cada ejemplo y lo que es común a todos ellos, de identificación de los factores clave que se mantienen invariantes de un caso particular a otro...

b) *Expresar la regularidad.*

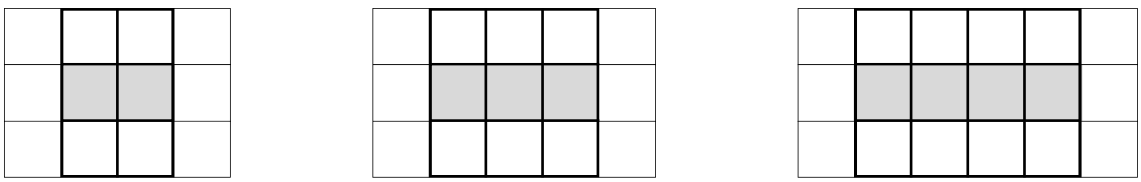
Consiste en el intento de describir lo que se percibe, de comunicarlo (a uno mismo, a los demás), de hablar (o hablarse) y decir (o decirse) lo que se ve, con distintos grados de precisión.

En el caso que nos ocupa, podemos conjeturar que durante la resolución del ítem los alumnos pueden decirse a sí mismos cosas tales como:

- Cuantas más son las baldosas grises, más son las baldosas blancas.
- El ancho de los embaldosados es variable; el alto no lo es.
- En el embaldosado que tiene 2 baldosas grises, hay 10 baldosas blancas; el número de baldosas blancas es cinco veces el de baldosas grises.
- En cambio, en el embaldosado que tiene 3 baldosas grises, hay 12 blancas: la cantidad de baldosas blancas es cuatro veces la de baldosas grises.
- En los tres embaldosados, las dos líneas laterales (la de la izquierda y la de la derecha) tienen tres baldosas blancas cada una (seis baldosas blancas en total).



- En los tres embaldosados, descontando las dos líneas laterales, hay tres hileras que tienen la misma cantidad de baldosas: dos hileras formadas por baldosas blancas y una tercera formada por las baldosas grises; en este sector, el número de baldosas blancas es el doble del de baldosas grises.



- Por lo tanto, en cada embaldosado, el número de baldosas blancas es el doble del de grises, más seis...

c) *Hacer predicciones en base a la regularidad.*

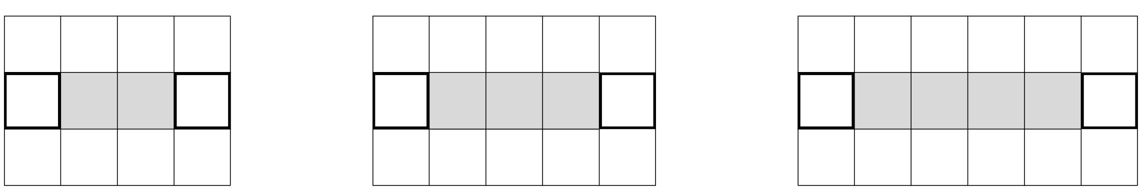
La ley que expresa la regularidad permite hacer predicciones: si las baldosas grises fueran 100, las blancas serían 2 . 100 + 6, o sea, 206.

Obviamente, el camino anterior conduce a la respuesta correcta.

Sin embargo, la distribución de las respuestas de los alumnos indica que la mayoría no llega a identificar la clave.

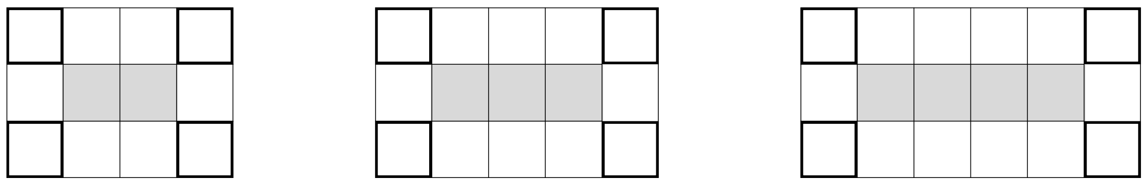
Quienes optan por los *distractores a* o *b,* pueden haberse centrado en un aspecto de la configuración de baldosas que si bien es necesario para el diseño, no es suficiente para caracterizarlo.

Por ejemplo, quienes optan por *a* (202), quizá advierten que hay un sector del embaldosado en el que el número de baldosas blancas es el doble del de baldosas grises (2 . 100 = 200) y que alineadas con las baldosas grises hay 2 baldosas blancas (una a la izquierda y otra a la derecha):



La última observación es cierta, pero no agota la estructura del embaldosado.

De manera análoga, los alumnos que optan por *b* (204), pueden haber reparado en que hay un sector del embaldosado en el que el número de baldosas blancas es el doble del de baldosas grises (2 . 100 = 200) y en que en las esquinas del embaldosado hay 4 baldosas blancas más:



La observación acerca de las cuatro baldosas es legítima, pero insuficiente para caracterizar el diseño.

En cuanto a los alumnos que optan por *d* (opción que señala que el número de baldosas blancas por el que se pregunta no se puede determinar), muy probablemente no han detectado la regularidad.

No es impensable que algunos de ellos hayan ensayado un modelo de proporcionalidad directa, y que hayan desembocado en *d* por dos caminos distintos:

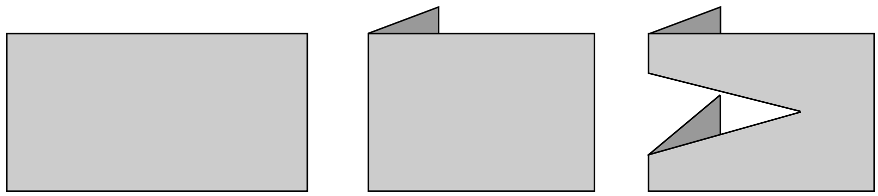
- Tal vez algunos pusieron a prueba el modelo de proporcionalidad directa sobre los tres embaldosados dato, y el modelo resultó incompatible con el conjunto (si, como en el primer embaldosado de la izquierda, a 2 baldosas grises les corresponden 10 blancas, en el embaldosado del centro a 3 baldosas grises deberían corresponderles 15 blancas, y en realidad hay 12, y en el embaldosado de la derecha a 4 baldosas grises deberían corresponderles 20 blancas, y en realidad hay 14).
- Otros, en cambio, pueden haber intentado usar el modelo de proporcionalidad directa para predecir el número de baldosas blancas que intervienen en un embaldosado que lleva 100 grises, haciendo pie en uno cualquiera de los tres embaldosados dados; por ejemplo, si cada 2 baldosas grises hay 10 blancas –como en el embaldosado de la izquierda–, cada 100 debería haber... 500 baldosas blancas. Como 500 no figura entre las opciones de respuesta, estos alumnos pueden haber decidido optar por *d*.

Señalemos, por último, que situaciones como la que propone el ítem pueden hacerse evolucionar, en el aula, hasta la expresión simbólica de la regularidad, por lo que constituyen una interesante vía de acceso al álgebra; en efecto, estamos en territorio algebraico si expresamos **b = 2 . g + 6**, siendo **g** el número de baldosas grises en el embaldosado y **b**, el de baldosas blancas.

Sobre la construcción de fórmulas, sugerimos ver el documento **Las pruebas de Matemática. Marco referencial.** Sobre el lenguaje de las fórmulas y el uso de las letras en álgebra, remitimos al documento **Del aula a las pruebas y de las pruebas al aula. Tres dimensiones para cuatro ejes.**

6

Se pliega una hoja de papel rectangular y se hace un corte, según se indica:



Si se despliega la hoja, ¿cuál de las figuras se obtiene?

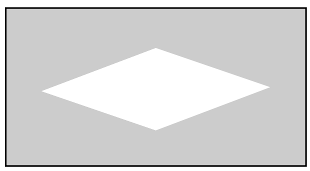


Figura **A**

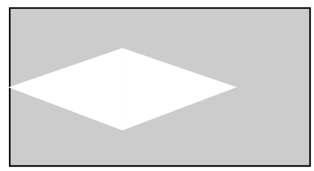


Figura **B**

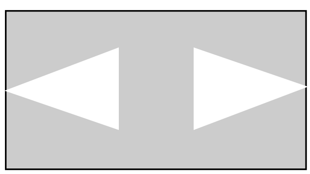


Figura **C**

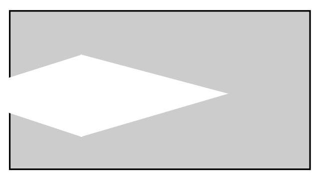


Figura **D**

a) La **A**.
b) La **B**.
c) La **C**.
d) La **D**.

Este ítem, que pertenece al eje Nociones geométricas y a la dimensión Procedimientos de trabajo, es el ítem del eje que recibió mayor porcentaje de respuestas correctas.

Evalúa si, a partir de interpretar representaciones bidimensionales del espacio tridimensional, y mediante un proceso de anticipaciones orientadas por nociones geométricas (triángulo, rectángulo, rombo, simetría), los alumnos son capaces de seleccionar el diseño obtenido a través de una transformación consistente en el plegado y corte de una hoja.

La resolución correcta del ítem implica coordinar dos procedimientos: un procedimiento de plegado y un procedimiento de corte; cada uno de ellos está sujeto a un sistema de condiciones tales como:

- El pliegue está más cerca del borde izquierdo de la hoja que del borde derecho.
- El pliegue es paralelo a esos bordes.

- El corte tiene forma de triángulo isósceles con un lado desigual.
- El lado desigual del triángulo apoya sobre el pliegue.
- La distancia entre el pliegue y el vértice del triángulo opuesto al lado desigual, es mayor que la distancia entre el borde izquierdo de la hoja y el pliegue.
- El eje de simetría horizontal de la hoja es eje de simetría del triángulo.

Las opciones de respuesta están construidas de manera que dos cualesquiera de ellas difieren por lo menos en una de estas tres condiciones (las demás condiciones están garantizadas en todas las opciones):

1. El pliegue está más cerca del borde izquierdo de la hoja que del borde derecho.
2. El lado desigual del triángulo apoya sobre el pliegue.
3. La distancia entre el pliegue y el vértice del triángulo opuesto al lado desigual, es mayor que la distancia entre el borde izquierdo de la hoja y el pliegue.

La mayor parte de los alumnos (el 71 %) opta por la respuesta correcta (*opción d*); el 15 % se inclina por el *distractor b*, el 9 % por el *distractor a* y el 4 % por el *distractor c.*

Es interesante analizar a título de hipótesis qué condiciones consideran y cuáles omiten los alumnos que eligen cada opción de respuesta.

Lo mostramos a través del siguiente cuadro, en el que los números remiten a las tres condiciones enumeradas más arriba:

		CONDICIONES		
		1	2	3
Opciones de respuesta	a	No se cumple	Se cumple	No se cumple
	b	Se cumple	Se cumple	No se cumple
	c	No se cumple	No se cumple	No se cumple
	d	Se cumple	Se cumple	Se cumple

El diseño que presenta el *distractor b,* que es el más atractivo, sólo incumple una de las tres condiciones. El que presenta el *distractor a,* incumple dos de las tres condiciones. El que presenta el *distractor c,* el menos atractivo, incumple las tres condiciones.

Análisis como el que acabamos de proponer pueden ser de utilidad para evaluar las producciones de los alumnos en el trabajo áulico.

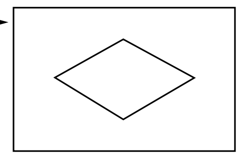
Este tipo de análisis permite ir más allá de la calificación de esas producciones en términos de "bien" o "mal", contribuyendo a detectar matices o grados de corrección o de incorrección (las *opciones a*, *b* y *c* son incorrectas, pero no parecen serlo en la misma medida), y, consecuentemente, a reorientar la actividad del alumno por medio de sugerencias específicas que haciendo pie en los logros parciales conduzcan a reelaborar los errores.

Llevar a cabo análisis similares con fines evaluativos, con una periodicidad acorde a las posibilidades de cada docente y a las necesidades de sus alumnos, puede beneficiar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática.

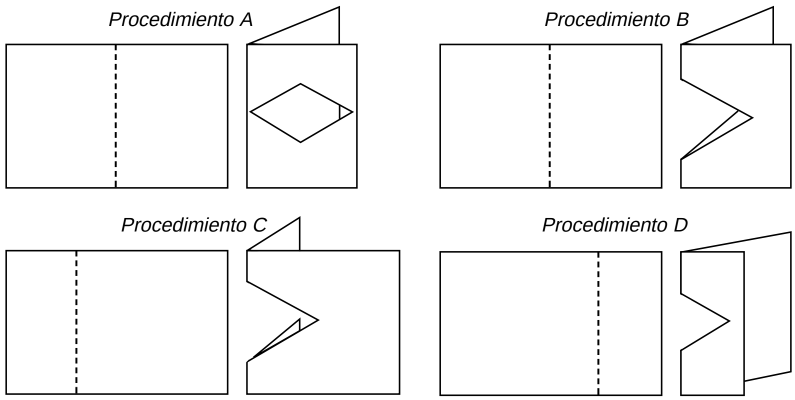
Por último, tres insumos para enriquecer la reflexión:

a) En la evaluación de abril de 1999, cuando cursaban Séptimo Año, los alumnos resolvieron este ítem:

19 Plegando y cortando una hoja de papel se quiere obtener la siguiente figura →



¿Qué procedimiento de plegado y corte hay que hacer?
(La línea de puntos indica la línea de plegado).



- Procedimiento A ○ 1
- Procedimiento B ○ 2
- Procedimiento C ○ 3
- Procedimiento D ○ 4

El 64 % de los alumnos optó por la respuesta correcta (*opción c*). Los *distractores a, b* y *d* recibieron el 19 %, el 6,5 % y el 4,5 % de las respuestas, respectivamente.

¿Qué semejanzas y diferencias hay entre ambos ítems (el ítem 1999 y el ítem 2001)? ¿Qué demanda cada uno?

¿Cómo se relacionan las distribuciones de las respuestas de los alumnos entre las cuatro opciones en un ítem y en el otro? ¿Hay tendencias comunes?

b) En el documento **Del aula a las pruebas y de las pruebas al aula. Tres dimensiones para cuatro ejes**, presentamos los niveles de desarrollo del razonamiento geométrico que proponen los Van Hiele.

¿En cuáles de los niveles podrían inscribirse los logros de los alumnos en estos ítems, en función de las competencias que los ítems requieren?

c) En el documento **Guía de lectura de los resultados y orientaciones para el trabajo institucional** se hace referencia a distintas presentaciones de la geometría en la escuela: la presentación ostensiva, centrada en el mirar; una presentación alternativa, rica en acciones y operaciones mentales.

¿Cómo pueden incidir esas propuestas en el desarrollo de la capacidad de los alumnos para resolver ítems como los que comentamos?

19

Dibujá una pirámide que tenga 5 vértices.
Con respecto a la pirámide que dibujaste, se puede afirmar que:

a) tiene 5 aristas.
b) tiene 6 caras.
c) su base es un polígono de 4 lados.
d) su base es un polígono de 5 lados.

Este ítem del eje Nociones geométricas y de la dimensión Estructuras conceptuales es uno de los ítems del eje que recibió menor porcentaje de respuestas correctas.

Evalúa si los alumnos son capaces de contar elementos (aristas, caras, lados del polígono base) de un poliedro (una pirámide) del cual se conoce el número de vértices, a partir de representaciones mentales o gráficas propias.

Recibió el 33,5 % de respuestas correctas (la respuesta correcta es *c*).

Los *distractores a, b* y *d* recogieron el 22 %, el 14,5 % y el 23,5 % de las respuestas, respectivamente.

Los distractores más elegidos, *a* y *d,* que concentran cerca de la mitad de las respuestas, son los que repiten el valor numérico del dato:

- La pirámide tiene **5** vértices.
- El *distractor a* dice que tal pirámide tiene **5** aristas.
- El *distractor d* afirma que la base de la pirámide es un polígono de **5** lados.

Cabe pensar, en consecuencia, que los alumnos han trasladado a un poliedro una propiedad básica de los polígonos (objetos geométricos que les son más familiares): un polígono de 5 lados posee 5 vértices y también 5 ángulos interiores.

Entre las hipótesis que pueden explicar las respuestas erróneas de los alumnos, incluida la extrapolación ilegítima de una propiedad de los polígonos a los poliedros, podemos mencionar:

- Una disponibilidad o un manejo débiles de los conceptos en juego (pirámide, arista, cara, base).
- Una tendencia a seleccionar directamente la respuesta sin atenerse a la consigna del ítem ("Dibujá una pirámide..."); es decir, una tendencia a "leer y marcar", sin que entre la lectura y la marca medie el proceso de representación gráfica (y sin que la representación mental del cuerpo en cuestión sea lo suficientemente nítida como para servir de referencia).
- Una dificultad para representar bidimensionalmente un objeto tridimensional...

Por otra parte, es posible que algunos de los alumnos que optan por el *distractor a* sólo hayan computado las 5 aristas visibles en ciertas representaciones particulares y habituales de las pirámides de 5 vértices (piénsese, por ejemplo, en ciertas vistas laterales de las pirámides de Egipto, en las cuales, efectivamente, se ven 5 aristas).

Se puede apostar a que un progresivo abandono de la presentación ostensiva de la geometría en el contexto escolar, y un mayor énfasis en una geometría de la acción, de la construcción, de la comunicación, se van a traducir en avances y logros en este campo (una vez más, remitimos al documento **Guía de lectura de los resultados y orientaciones para el trabajo institucional**, en el cual el lector encontrará reflexiones complementarias de las que aquí delineamos).

Por último, sugerimos vincular las respuestas al ítem analizado, y el propio análisis, con las respuestas que los mismos alumnos dieron en abril de 1999 –cuando estaban en Séptimo Año– al ítem que sigue:

14

Dibujá en un papel cualquiera un hexágono y trazá todas las diagonales que salen de un vértice. ¿Cuántos triángulos se forman?

◆ 2	○	1
◆ 4	○	2
◆ 5	○	3
◆ 6	○	4

También el ítem de 1999 requería efectuar una construcción y hacer un recuento a partir de ella; pero a diferencia del ítem de la pirámide, la construcción y el recuento se referían a una figura (plana) y no a un cuerpo (tridimensional).

El 25 % de los alumnos optó por la respuesta correcta (*opción b*), mientras que un porcentaje mayor, el 32 %, se inclinó por el *distractor d*, que repite el valor numérico del dato: el ítem alude a un **hexágono** (polígono de **6** lados), y el distractor indica que si sobre el hexágono se trazan todas las diagonales que salen de uno de los vértices, se forman **6** triángulos.

20

Se sumaron los ángulos interiores de un cuadrilátero y se obtuvo 360°. ¿De qué cuadrilátero se trata?

a) Sin duda de un cuadrado.
b) Sin duda de un rectángulo.
c) Sin duda de un trapecio.
d) De cualquiera.

Este ítem evalúa si el alumno recuerda que 360º es el valor de la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero cualquiera.

Podrá resolverlo quien tenga disponible –en su repertorio de conocimientos– la propiedad: "En *todo* cuadrilátero, la suma de los ángulos interiores vale 360º".

El ítem se inscribe en el eje Nociones geométricas y en la dimensión Estructuras conceptuales.

Es el ítem del eje que recibió el menor porcentaje de respuestas correctas.

Sólo responde satisfactoriamente (optando por la *alternativa d*) el 30 % de los alumnos. Un porcentaje mayor, el 33,5 %, escoge el *distractor a* (estos alumnos parecen creer que el único cuadrilátero cuyos ángulos interiores suman 360º es el cuadrado). Los *distractores b* y *c* reciben el 16,5 % y el 15 % de las respuestas, respectivamente.

En abril de 1999, en Séptimo Año, los alumnos resolvieron este otro ítem, que requiere evocar el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo:

13

Alicia ha dibujado un triángulo y ha sumado sus ángulos. ¿Cuál es el valor obtenido?

- 90° ◯ 1
- 180° ◯ 2
- 360° ◯ 3
- Depende del triángulo. ◯ 4

En aquel momento, optó por la respuesta correcta (*opción b*) el 16,5 % de los alumnos, mientras que el 56,5 % eligió el *distractor d*.

Es importante no confundir la operación mental necesaria para resolver estos ítems (evocar, recordar, recuperar de la memoria) con las acciones y operaciones necesarias para aprender las propiedades a las que apelan.

Éstas no pueden aprenderse genuinamente por simple memorización; son propiedades básicas y estructurales de los cuadriláteros, o de los triángulos; su aprehensión supone haber experimentado con ellos lo suficiente como para tomar conciencia de que la suma de los ángulos interiores de todos los triángulos vale 180º, y la de todos los cuadriláteros, 360º –independientemente de características particulares en cuanto a sus lados o a sus ángulos–; y presupone conocer cada uno de los conceptos de la red de conceptos que las propiedades relacionan (suma, ángulo, ángulo interior, triángulo o cuadrilátero, sistema sexagesimal de medición de amplitudes angulares...).

Sin embargo, las propiedades tampoco pueden aprenderse/recordarse sin la intervención de la memoria.

Sucesivas aplicaciones de las pruebas parecen sugerir que ítems como los que comentamos, que requieren recordar una propiedad geométrica específica, presentan para los alumnos un grado de dificultad inusualmente alto.

El patrón de comparación es el grado de dificultad de otros ítems referidos a temas afines, que implican operaciones mentales más complejas que el evocar, y que a pesar de ello son resueltos satisfactoriamente por un porcentaje mayor de alumnos (piénsese, por ejemplo, en el ítem de "plegado y corte").

En consecuencia, sólo una parte de la dificultad de aquellos ítems puede atribuirse a la presencia insuficiente de la experimentación, la construcción, la representación, la puesta en palabras, el establecimiento de relaciones, etc., durante el aprendizaje del tema correspondiente. Y se hace necesario reflexionar acerca del papel jugado por la memorización en ese proceso.

La memoria, lejos de ser una capacidad menor y carente de importancia, es una de las funciones mentales superiores.

"Precisamente porque quedarse agarrado a los objetos que están al rojo vivo, tiene pocas ventajas, nuestro reflejo innato de dejarlos caer posee un valor evidente. La vida, sin embargo, rara vez puede anticiparse con tanta certeza, por lo cual resulta ventajoso tener la habilidad de aprender y recordar. Si descubrimos una fuente de alimentación y podemos recordar su localización, en vez de tener que volver a descubrirla, nos resultará más probable sobrevivir. Este es un ejemplo de aprendizaje de un hecho: se deposita una experiencia en la memoria y posteriormente, cuando se necesita, se la llama a la mente. Esta habilidad parece trivial; sin embargo, es la envidia de los que trabajan en inteligencia artificial, quienes todavía tienen que diseñar programas que recuperen hechos con la misma sensibilidad con respecto al contexto." [4]

La complejidad de la memoria se pone de manifiesto en cuanto consideramos todo lo que supone que el alumno recuerde las propiedades que se necesitan para resolver los ítems que estamos analizando.

En primer lugar, en el momento de aprender dichas propiedades, el sistema de la memoria debe registrar las experiencias de aprendizaje y evaluarlas como dignas de ser recordadas. Obviamente, las estrategias de enseñanza utilizadas por el docente en esos momentos son determinantes tanto de la intensidad del registro como de lo favorable de la valoración.

En segundo lugar, el sistema de la memoria debe almacenar o depositar una representación de las experiencias. De allí la importancia de utilizar en el aula representaciones múltiples: desde representaciones manipulables (dibujar triángulos o cuadriláteros, recortar sus ángulos, ubicarlos de manera que formen un ángulo llano, o de 360º)

[4] Johnson-Laird, P. (1988). *El ordenador y la mente. Introducción a la ciencia cognitiva.* Barcelona, Paidós, 1990.

hasta representaciones gráficas (dibujar la configuración anterior), simbólicas (a + b + c = 180º, a + b + c + d = 360º), verbales (La suma de los ángulos interiores de un triángulo vale 180º, La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero vale 360º)...

En tercer lugar, la memoria del alumno debe mantener el recuerdo durante un período más o menos largo: desde aquellas experiencias de aprendizaje hasta el momento en que los ítems son resueltos. Por supuesto, las estrategias de repaso contribuyen a sostener el recuerdo. Tales estrategias no se reducen a la pura repetición, sino que también comprenden la elaboración y la reelaboración de la información, relacionándola con nuevos conceptos y nuevas propiedades. Utilizar la suma de los ángulos interiores de un triángulo para inferir la de los ángulos interiores de un cuadrilátero, por ejemplo, también constituye una estrategia de repaso de una de las propiedades que nos ocupan.

En cuarto lugar, el sistema de la memoria debe recuperar el recuerdo rápida y eficientemente cuando los ítems lo requieren. En este caso, la recuperación es el resultado de un acto deliberado del alumno; en otros casos, la recuperación es espontánea (cuando una cosa nos recuerda otra).

Por último, el alumno debe retener en la conciencia el recuerdo recuperado el tiempo suficiente como para que le sea posible responder a los ítems.

Las conceptualizaciones anteriores se orientan didácticamente en dos direcciones complementarias:

- *Reivindicar el valor de la memoria, entendida como memoria comprensiva y contrapuesta a la memoria mecánica.*

  La memorización comprensiva consiste en la ubicación de un contenido de aprendizaje en una red de significados; contribuye a extender esa red, la enriquece, y así incrementa la capacidad de establecer nuevas relaciones ante otras situaciones. Un aprendizaje memorizado comprensivamente tiene un alto valor funcional: está disponible para ser utilizado y reinvertido en la resolución de nuevos problemas y en la generación de nuevos significados.

  La memorización mecánica ("estudiar de memoria") desplaza a la memorización comprensiva y toma su lugar cuando los contenidos carecen de significatividad para el alumno, es decir, cuando son arbitrarios, cuando no guardan relación con sus saberes previos, cuando la propia actitud del alumno es desfavorable al establecimiento de relaciones entre lo que ya sabe y lo que debe aprender.

- *Reivindicar el valor del estudio, incluso en su dimensión elemental de fijación del conocimiento.*

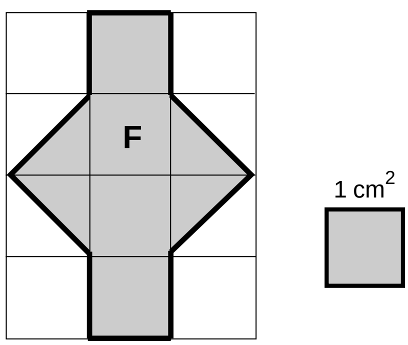
  "El estudio es hoy el eslabón perdido entre una enseñanza que parece querer controlar todo el proceso didáctico y un aprendizaje cada vez más debilitado por la exigencia de que se produzca como una consecuencia inmediata, casi instantánea, de la enseñanza. (Se) pretende restituir el estudio al lugar que le corresponde: el corazón del proyecto educativo de nuestra sociedad.

En lugar de circunscribir la educación a la interacción entre enseñanza y aprendizaje, proponemos considerarla de manera más amplia como un proyecto de estudio cuyos principales protagonistas son los alumnos.

El profesor dirige el estudio, el alumno estudia, los padres ayudan a sus hijos a estudiar y a dar sentido al esfuerzo que se les exige. Una vez restablecido este eslabón, se puede también restablecer la comunicación entre alumnos, padres y profesores, haciendo que el diálogo entre la sociedad y la escuela recobre su sentido primordial: la escuela lleva a las jóvenes generaciones a estudiar aquellas obras humanas que mejor les servirán para comprender la sociedad en la que se disponen a entrar." [5]

33

¿Cuál es la superficie de la figura **F**?



a) 6 cm^2
b) 8 cm^2
c) más de 4 cm^2 y menos de 6 cm^2
d) más de 6 cm^2 y menos de 8 cm^2

Este ítem evalúa si los alumnos son capaces de calcular el área de una figura dibujada sobre una cuadrícula, en una situación en la que la figura cubre cuadritos completos y mitades de cuadritos, y en la que cada cuadrito tiene un área conocida.

En otras palabras, la determinación del área tiene lugar en un contexto muy sencillo:

- El objeto por cuya área se pregunta –la figura **F**– está presente, es visible.
- La unidad de medida –1 cm^2– también está presente y es visible.
- El área se puede calcular sumando subáreas (1 cm^2 por cada cuadro totalmente cubierto por **F**; 0,5 cm^2 por cada cuadro parcialmente cubierto). También, recomponiendo cuadros con medios cuadros, y contando cuadros. O haciendo compensaciones: "a este cuadro que está cubierto por la mitad lo cuento como 1, y, para compensar, a este otro, que también está cubierto por la mitad, no lo computo".

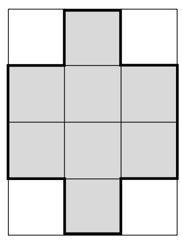
[5] Chevallard, Y.; Bosch, M.; Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona, ICE/Horsori.

El ítem pertenece al eje Mediciones y a la dimensión Estructuras conceptuales.

A pesar de que sólo el 37 % de los alumnos opta por la respuesta correcta (*opción a*), éste es el ítem del eje Mediciones que recibió el mayor porcentaje de respuestas correctas.

El 23 % de los alumnos elige el *distractor b*, el 21 % elige el *distractor c* y el 13 % elige el *distractor d*.

Quienes se inclinan por el *distractor b* (8 cm^2) sobreestiman el área de la figura al imputarle 1 cm^2 por cada cuadro de la cuadrícula que la figura cubre, aun cuando lo cubra parcialmente (aun cuando sólo la mitad del cuadro forme parte de la figura). En consecuencia, calculan el área de esta figura:



Quienes seleccionan el *distractor c* (más de 4 cm^2 y menos de 6 cm^2), intentan acotar el área, encuadrarla entre dos topes.

Simbólicamente, el *distractor c* equivale a 4 cm^2 < área de **F** < 6 cm^2.

Los 4 cm^2 corresponden a los cuatro cuadros de la cuadrícula totalmente cubiertos por la figura. Los 6 cm^2 corresponden a aquellos cuatro cuadros más los cuatro cuadros cubiertos a medias.

El área de **F** es de más de 4 cm^2, ya que hay cuatro cuadros de 1 cm^2 cada uno completamente incluidos en la figura, y otros cuatro cuadros parcialmente cubiertos por ella (esta cota inferior no es errónea, pero admite mayor ajuste).

Ahora bien: el área de **F** no es inferior a 6 cm^2, pues los cuatro cuadros parcialmente cubiertos lo están justo por la mitad, y suman exactamente 2 cm^2 a los 4 cm^2 de los cuadros totalmente cubiertos.

Un origen posible para esta subestimación del área de **F** puede buscarse en la operación de conservación, en las raíces del concepto de área.

La conservación de una magnitud es la constancia o invariancia de la propiedad de que se trata ante ciertas transformaciones; por ejemplo, el área de una lámina no se modifica si se la fragmenta en trozos.

En el caso que nos ocupa: el área de cuatro medios cuadros de la cuadrícula es idéntica a la de dos cuadros (son fácilmente imaginables y reproducibles los procedimientos de fragmentación de los cuadros y reagrupamiento de los fragmentos).

Tal vez algunos de los alumnos que optan por el *distractor c* fracasen en la conservación, y sospechen que el área de cuatro medios cuadros es menor que la de dos cuadros completos.

Consideraciones similares pueden hacerse respecto del *distractor d.*

Su expresión simbólica es 6 cm^2 < área de **F** < 8 cm^2

Algunos de los alumnos que sobreestiman el área de **F**, y la consideran mayor que 6 cm^2, pueden estar considerando que el área de cuatro medios cuadros es mayor que la de dos cuadros completos (no conservación).

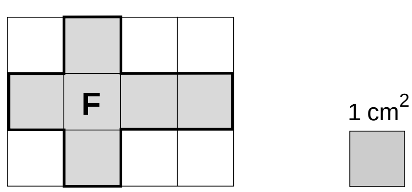
En cuanto a los 8 cm^2: corresponden a los ocho cuadros que la figura cubre, total o parcialmente; es una cota superior correcta, pero demasiado imprecisa.

Para sondear estas hipótesis, puede ser de interés desarrollar en el aula la siguiente secuencia:

a) Los alumnos resuelven individualmente el ítem en su formulación original.

b) Los alumnos resuelven también individualmente esta versión del ítem (en la que los cuatro medios cuadros del ítem original han sido reemplazados por dos cuadros completos):

¿Cuál es la superficie de la figura **F**?



a) 6 cm^2
b) 8 cm^2
c) más de 4 cm^2 y menos de 6 cm^2
d) más de 6 cm^2 y menos de 8 cm^2

c) El docente corrige las respuestas individuales de los alumnos.

d) El docente agrupa a los alumnos en función de sus respuestas a estos dos ítems; los grupos de interés son básicamente dos: el de los alumnos que dan respuestas coincidentes a ambos ítems, y el de los alumnos que dan respuestas diferentes a ambos ítems.

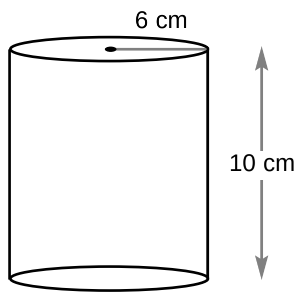
e) En cada uno de los grupos, el docente promueve la discusión respecto de las semejanzas y las diferencias que presentan las dos propuestas, prestando especial atención a los argumentos que los alumnos emplean, y procurando arribar a conclusiones.

f) El docente coordina una puesta en común general de las conclusiones obtenidas por los distintos grupos.

Para cerrar el análisis del ítem, señalemos que el problema de cómo revisar críticamente la enseñanza de la medición merece un tratamiento más pormenorizado en el documento **Del aula a las pruebas y de las pruebas al aula. Tres dimensiones para cuatro ejes**, al cual remitimos.

31

Una marca de atún ingresará al mercado la lata "tamaño familiar" con las medidas que se indican en el esquema.



La lata va a llevar una etiqueta rectangular. ¿Aproximadamente qué medidas debe tener ese rectángulo para rodear completamente la lata?

a) 6 cm de largo por 10 cm de alto.
b) 12 cm de largo por 10 cm de alto.
c) 36 cm de largo por 10 cm de alto.
d) 108 cm de largo por 10 cm de alto.

Este ítem del eje Mediciones y de la dimensión Procedimientos de trabajo es uno de los ítems del eje que recibió menor porcentaje de respuestas correctas.

Evalúa si, conocidos el radio y la altura de un cilindro, los alumnos son capaces de determinar las dimensiones del rectángulo que constituye su cara curva.

El 23 % de los alumnos elige la *opción c,* que es la respuesta correcta.

El 25,5 % elige el *distractor a;* el 32 %, el *distractor b;* y el 14 %, el *distractor d*. Así, los *distractores a* y *b* resultan más atractivos que la propia respuesta correcta.

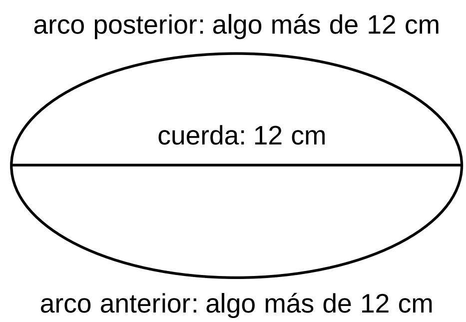
El *distractor a* reproduce los datos del esquema, y descansa sobre una lectura muy directa y superficial de la situación; en realidad, con una etiqueta rectangular de 6 cm de largo por 10 cm de alto se puede rodear una lata cilíndrica de $\frac{6 \text{ cm}}{2\pi} \cong 1$ cm de radio (tomando π como 3, tal como se les indica a los alumnos para la resolución de la prueba), y de 10 cm de alto.

El *distractor b* da las dimensiones del rectángulo que se corresponde con la vista frontal o con el corte longitudinal de la lata; con una etiqueta de esas dimensiones se lograría rodear una lata de $\frac{12 \text{ cm}}{2\pi} \cong 2$ cm de radio (con $\pi \cong 3$) y de 10 cm de alto.

¿Cuál es la lógica del *distractor d*? En lugar de determinarse el largo del rectángulo por medio de la fórmula $2 \cdot \pi \cdot 6$ cm (perímetro o longitud de la circunferencia de 6 cm de radio), se lo hace por medio de la fórmula $\pi \cdot (6 \text{ cm})^2$ (área del círculo de 6 cm de radio); con una etiqueta de 108 cm de largo por 10 cm de alto se podría etiquetar una lata de 18 cm de radio (siempre con $\pi \cong 3$) por 10 cm de alto.

Resulta interesante observar que el porcentaje de respuestas incorrectas que presenta el ítem parece explicarse menos por un manejo insuficiente de la fórmula de longitud de la circunferencia (fórmula que, por otra parte, figura en una lista de fórmulas matemáticas de uso frecuente que los alumnos reciben junto con la prueba), que por una inadecuada comprensión de las relaciones entre las dimensiones de un cuerpo y las de la figura plana que lo genera.

En efecto, si un alumno ha tenido experiencias de construcción de cuerpos por plegado, y de interpretación y trazado de los croquis de tales cuerpos, puede resolver el ítem por una vía más estimativa que exacta: basta con advertir que como la cuerda de 12 cm subtiende dos arcos que necesariamente son más largos que ella, el largo de la etiqueta debe ser algo superior a 24 cm, y la única opción de respuesta en esas condiciones es la respuesta correcta (*opción c*, 36 cm).



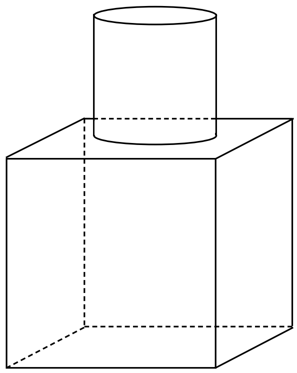
Quizá valga la pena retomar el ítem en el aula, poniendo a disposición de los alumnos el material concreto que les permita:

- construir –en cartón o cartulina– y visualizar la lata que hay que etiquetar,
- hipotetizar acerca de las dimensiones de la etiqueta,
- construir la etiqueta en función de las hipótesis,
- verificar empíricamente si las hipótesis son correctas o incorrectas (etiquetando con etiquetas "contantes y sonantes" los modelos de lata también "contantes y sonantes"),
- discutir sobre los resultados, ajustar las dimensiones de la etiqueta, reconstruirla, volver a probar,
- sacar conclusiones y testearlas con cilindros de otras dimensiones.

Recordemos que en el documento **Del aula a las pruebas y de las pruebas al aula. Tres dimensiones para cuatro ejes** proponemos líneas de reflexión y trabajo para la enseñanza de la medida.

29

Una fábrica de perfumes sacó a la venta una nueva fragancia, en un envase del tipo que se muestra en la figura. Ante la demanda inesperada del producto, piensan diseñar un envase que permita duplicar el contenido. ¿Cuál de las siguientes propuestas cumple con lo requerido?



a) Duplicar una cualquiera de las tres dimensiones del envase: el largo, el ancho o el alto, y mantener las otras dos.

b) Duplicar las tres dimensiones del envase: el largo, el ancho y el alto.

c) Duplicar el largo y el ancho de la base, manteniendo la misma altura.

d) Duplicar una de las dos dimensiones de la base (el largo o el ancho), y duplicar la altura.

Este ítem se inscribe en el eje Mediciones y en la dimensión Procesos cognitivos.

Evalúa si los alumnos son capaces de evaluar qué modificación en las dimensiones de un cuerpo (prisma rectangular recto) produce determinado impacto en su volumen.

En el eje Mediciones, es el ítem que recibió menor porcentaje de respuestas correctas.

Sólo el 18 % de los alumnos selecciona la respuesta correcta (*opción a*), que resulta menos atractiva que cualquiera de los tres distractores.

El *distractor b* concentra el 31,5 % de las respuestas; el *distractor c,* el 22,5 %; y el *distractor d,* el 21,5 %.

Para simplificar notaciones, supongamos que el largo, el ancho y el alto del envase original son **l**, **a** y **h**, respectivamente, con lo cual su volumen es

V = superficie de la base . h

y como la base es un rectángulo,

V = l . a . h

(Recordemos que en el momento de la prueba los alumnos disponen de fórmulas matemáticas de uso habitual, entre las que se encuentran las necesarias como para resolver este ítem).

El *distractor b* postula que las tres dimensiones del envase de la nueva fragancia duplican las del envase original; es decir, las dimensiones del nuevo envase son

l' = 2 . l

a' = 2 . a

h' = 2 . h

Por lo tanto, el volumen de este nuevo envase es

V' = l' . a' . h'

O, lo que es lo mismo,

V' = (2 . l) . (2 . a) . (2 . h)

Que aplicando las propiedades conmutativa y asociativa del producto de números reales se transforma en:

V' = 8 . (l . a . h)

Y recordando que **l . a . h** es **V**:

V' = 8 . V

En síntesis: duplicar las tres dimensiones del envase octuplica su volumen.

Análisis similares demuestran que las transformaciones que se describen en los *distractores c* y *d* conducen a una cuadruplicación del volumen del envase.

En el caso del *distractor c*:

l' = 2 . l

a' = 2 . a

h' = h

En consecuencia, el volumen del nuevo envase es

V' = l' . a' . h'

Que se puede expresar como:

V' = (2 . l) . (2 . a) . h

Aplicando las propiedades conmutativa y asociativa del producto de números reales resulta:

V' = 4 . (l . a . h)

Y recordando que **l . a . h** es **V**:

V' = 4 . V

En el caso del *distractor d*, suponiendo, sin pérdida de generalidad, que se duplica el largo de la base y no el ancho:

l' = 2 . l

a' = a

h' = 2 . h

Por lo tanto, el volumen del nuevo envase es

V' = l' . a' . h'

O, lo que es lo mismo,

V' = (2 . l) . a . (2 . h)

Que aplicando las propiedades conmutativa y asociativa del producto de números reales se transforma en:

V' = 4 . (l . a . h)

Y como **l . a . h** es **V**:

V' = 4 . V

Desde el punto de vista didáctico, el ítem se inscribe en la línea de las propuestas de aritmetización de la medida que dan pie a que los alumnos establezcan relaciones entre las distintas dimensiones de una figura o un cuerpo (ver documento **Del aula a las pruebas y de las pruebas al aula. Tres dimensiones para cuatro ejes**).

En efecto: no se trata de calcular una dimensión (ni siquiera se cuenta con las medidas de las longitudes o de los volúmenes que intervienen), sino de anticipar qué transformación deben sufrir las dimensiones lineales de un prisma para que su volumen se transforme en cierta dirección (se duplique).

Es probable que los alumnos que optan por el *distractor b*, que es el que resulta más atractivo, trasladen a la situación que se les plantea (que requiere relacionar dimensiones lineales o longitudes con volumen) la relación entre dimensiones lineales y perímetro; por ejemplo, si se duplican la base y la altura de un rectángulo, el perímetro del rectángulo también se duplica.

Parece necesario trabajar en el aula la situación que propone el ítem (y otras semejantes), recurriendo a construcciones de cartón o materiales similares, modificando sus dimensiones según describe cada distractor, y comprobando experimentalmente las modificaciones volumétricas que aquellas transformaciones provocan. Así se podrá ir corrigiendo y ajustando la tendencia de los alumnos a subestimar el impacto que las variaciones de las dimensiones lineales de los cuerpos tienen en el volumen, tendencia que el ítem que comentamos pone de manifiesto.

Una línea de trabajo que puede resultar altamente motivadora es la siguiente:

a) Se orienta a los alumnos para que constaten que si las dimensiones lineales de una figura se multiplican por un número real k se obtiene una nueva figura cuya área resulta de multiplicar el área de la figura original por k^2; por ejemplo: el área de un cuadrado de 3 cm de lado es 9 cm^2; el área de un cuadrado de 6 cm de lado (6 es el doble de 3; 6 = 2 . 3) es 36 cm^2 (36 es el cuádruplo de 9; $36 = 4 . 9 = 2^2 . 9$).

b) Se guía a los alumnos para que constaten que si las dimensiones lineales de un cuerpo se multiplican por un número real k se obtiene un nuevo cuerpo cuyo volumen es igual al del cuerpo original multiplicado por k^3 (recordar el análisis del *distractor b*: la duplicación del largo, el ancho y el alto del envase se traduce en una octuplicación de su volumen).

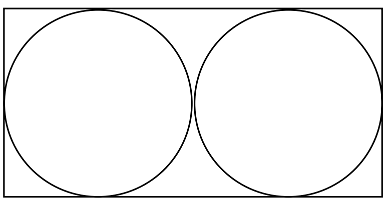
c) En general, el crecimiento en volumen en función del crecimiento en longitud es equivalente al crecimiento en peso. Capitalizando este hecho, se pueden discutir situaciones tales como:

- *King Kong no existe*: el volumen y el peso de un animal cuyas dimensiones lineales fueran ampliadas según la escala 20 a 1 se incrementarían $20^3 = 8.000$ veces, mientras que la sección transversal de sus huesos lo haría $20^2 = 400$ veces. Es decir, el peso se incrementa con el cubo del factor de escala, pero la capacidad para soportarlo –medida por el área de la sección transversal de los huesos– sólo se incrementa con el cuadrado de ese factor (¡así, no hay hueso que aguante!!!); la presión de semejante peso excedería la resistencia al aplastamiento de los huesos, y el gigante sucumbiría bajo su propio peso.
- *La dieta de Gulliver en Liliput*: Como la estatura de Gulliver excedía a la de los ministros de la corte de Liliput en proporción 12 a 1, éstos concluyeron que Gulliver debía recibir una ración de comida equivalente a 1.728 veces la de ellos... (¿Por qué?).
- *Tomando medidas en una colonia de flamencos*: Un flamenco que pesa 1,5 kg tiene patas de alrededor de 45 cm de largo. Un flamenco de 6 kg tiene patas de alrededor de... ¿cuántos cm? (Si su respuesta es "alrededor de 1,8 m", revise sus cálculos; si su respuesta es "alrededor de 70 cm", está en lo cierto[6]).

A continuación, volvemos a uno de los ítems que los alumnos que cursaban Noveno Año en 2001 resolvieron en abril de 1999, en Séptimo Año:

23

Manuel debe ampliar esta figura de modo que el diámetro de cada circunferencia se duplique.



En tal caso, el nuevo rectángulo deberá tener:

- el doble del largo y el mismo ancho que el anterior. ○ 1
- el doble del largo y el doble del ancho que el anterior. ○ 2
- cuatro veces el largo y el doble del ancho que el anterior. ○ 3
- cuatro veces el largo y cuatro veces el ancho del anterior. ○ 4

---

[6] La relación entre los pesos es igual al cubo de la relación entre las longitudes de las patas; por lo tanto, esta última relación es igual a la raíz cúbica de aquélla.

El ítem fue resuelto correctamente por el 42 % de los alumnos, que eligió la *opción b*. El distractor más atractivo, el *a*, fue seleccionado por el 20,5 % de los alumnos, mientras que los *distractores c* y *d* recibieron 15 % y 12,5 % de respuestas.

¿Qué semejanzas y qué diferencias se pueden establecer entre el ítem del envase de perfume y este ítem?

En uno y otro caso, se requiere vincular una modificación en ciertas dimensiones de un objeto (el volumen del envase, los diámetros de las dos circunferencias) con modificaciones en otras dimensiones (el largo, el ancho y el alto del envase, el largo y el ancho del rectángulo).

En ambos casos, se da como dato el efecto a lograr (duplicar el volumen, duplicar los diámetros de las dos circunferencias), y se pregunta por una transformación capaz de producir tal efecto.

Ahora bien: mientras que el ítem destinado a Noveno Año pone en juego relaciones entre volumen y dimensiones lineales, el ítem destinado a Séptimo Año sólo ponía en juego relaciones entre dimensiones lineales.

Dejamos a cargo del lector el análisis didáctico de las relaciones entre las respuestas de los alumnos a estos dos ítems.

29

Los 20 chicos de un curso organizaron una colecta para hacerle un regalo a cada uno de sus 5 docentes. Cada chico puso en un sobre lo que podía aportar; 6 de los sobres contenían $ 10, y 14 contenían $ 4.

Se trata de averiguar cuánto pueden gastar en promedio por cada regalo; ¿cuál de los siguientes razonamientos es correcto?

a) Como hay sobres con $ 10 y sobres con $ 4, el promedio se calcula haciendo $\frac{10 + 4}{2}$

b) Como hay 6 sobres con $ 10 y 14 con $ 4, y los chicos son 20, el promedio se calcula haciendo $\frac{6 . 10 + 14 . 4}{20}$

c) Como hay 6 sobres con $ 10 y 14 con $ 4, y los docentes son 5, el promedio se calcula haciendo $\frac{6 . 10 + 14 . 4}{5}$

d) Como hay 6 sobres con un importe y 14 con otro, y los docentes son 5, el promedio se calcula haciendo $\frac{6 + 14}{5}$

Este ítem evalúa si los alumnos son capaces de evaluar razonamientos y procedimientos referidos al cálculo de la media aritmética con datos agrupados.

Pertenece al eje Nociones de Estadística y Probabilidad, y a la dimensión Procesos cognitivos, y es el ítem del eje que mereció mayor porcentaje de respuestas correctas.

El 42 % de los alumnos elige la respuesta correcta (*opción c*), mientras que el 14 %, el 24 % y el 14 % elige los *distractores a*, *b* y *d*, respectivamente.

Analicemos, en primer lugar, la lógica del distractor más atractivo, el *b*.

En realidad, el cálculo $\frac{6 \,.\, 10 + 14 \,.\, 4}{20}$ no da respuesta a la pregunta *"¿Cuánto pueden gastar en promedio los alumnos por cada regalo?"*, sino a la pregunta *"¿Cuánto aportó en promedio cada alumno?"* o *"¿Cuánto dinero hay en promedio en cada sobre?"*; el dividendo (6 . 10 + 14 . 4) expresa cuánto dinero recaudaron los alumnos (6 sobres contenían $ 10 cada uno; 14 sobres contenían $ 4 cada uno) y el divisor (20) indica cuántos son los alumnos del curso, y cuántos son los sobres.

En cuanto al *distractor a,* el cálculo $\frac{10 + 4}{2}$ se orienta a dar respuesta a la misma pregunta que el del *distractor b,* pero a través de la media *simple* y no de la media *ponderada,* es decir, sin tomar en consideración las frecuencias correspondientes a cada valor de la variable (pasa por alto el hecho de que hay 6 sobres con $ 10 cada uno, y 14 sobres con $ 4 cada uno).

Por último, el *distractor d* presenta un cálculo ($\frac{6 + 14}{5}$) que permite dar respuesta a una pregunta que en la situación a la que se refiere el ítem carece de sentido práctico: *"¿Cuántos sobres hay que destinar en promedio a la compra de cada regalo?"*.

Los comentarios anteriores plantean un modo de retrabajar el ítem en el aula: analizar cada opción de respuesta no sólo en términos de "correcta" o "incorrecta", sino también en términos de cuál es la pregunta a la que da respuesta. Esta línea de trabajo puede contribuir a la comprensión del concepto de media aritmética, concepto cuya dificultad suele subestimarse.

A propósito del concepto de media aritmética, sugerimos ver el documento **Del aula a las pruebas y de las pruebas al aula. Tres dimensiones para cuatro ejes**.

36

En un concurso de preguntas y respuestas los participantes eligen un sobre al azar. Cada sobre contiene una pregunta, que una vez formulada se retira del juego.

Hay 20 preguntas disponibles, 10 de Historia y 10 de Geografía.

Los 5 primeros participantes han respondido preguntas de Historia. ¿Cuál es la probabilidad de que al próximo participante le toque responder una pregunta de Geografía?

a) $\frac{1}{20}$ b) $\frac{5}{20}$ c) $\frac{10}{20}$ d) $\frac{10}{15}$

El ítem pertenece al eje Nociones de Estadística y Probabilidad y a la dimensión Procedimientos de Trabajo.

Evalúa si los alumnos son capaces de calcular la probabilidad de un suceso en el contexto de una cadena de experiencias aleatorias dependientes.

Es uno de los ítems del eje Nociones de Estadística y Probabilidad que recibió menor porcentaje de respuestas correctas.

La respuesta correcta (*alternativa d*) es seleccionada por el 28 % de los alumnos; los *distractores a, b* y *c,* por el 16 %, el 27 % y el 23 %, respectivamente.

Para determinar la probabilidad de que el sexto participante deba responder a una pregunta de Geografía, es necesario seguir la evolución de la situación e identificar el número de casos favorables (¿Cuántas preguntas de Geografía quedan?) y el número de casos posibles (¿Cuántas preguntas quedan, sean de Historia, sean de Geografía?) una vez que los cinco primeros participantes han intervenido.

Visualicémoslo a través de una tabla:

	Preguntas de Historia	Preguntas de Geografía	Total de preguntas
Situación inicial (S)	10	10	20
Evolución	- 5	0	- 5
Situación final (S´)	5	10	15

Los tres distractores fijan en 20 el número de casos posibles, como si hubiera reposición de las preguntas después de que son respondidas.

Para que la probabilidad de que al sexto participante le toque responder una pregunta de Geografía sea de $\frac{1}{20}$, como plantea el *distractor a,* en la situación final debería haber sólo 1 pregunta de Geografía, y 19 de Historia.

Para que la probabilidad de que al sexto participante le toque responder una pregunta de Geografía sea de $\frac{5}{20}$, como plantea el *distractor b,* en la situación final debería haber 5 preguntas de Geografía, y 15 de Historia.

Para que la probabilidad de que al sexto participante le toque responder una pregunta de Geografía sea de $\frac{10}{20}$, como plantea el *distractor c,* en la situación final debería haber 10 preguntas de Geografía (como efectivamente hay), y 10 de Historia (como si las 5 preguntas respondidas por los participantes anteriores no hubieran sido retiradas, o hubieran sido repuestas también como preguntas de Historia).

Como en otros ítems ya comentados, llama la atención que los distractores más elegidos (*b* y *c*), que concentran el 50 % de las respuestas, sean los que repiten datos del enunciado (5 participantes, 10 preguntas de Historia, o de Geografía, 20 preguntas disponibles).

La tendencia a optar por aquellas alternativas de respuesta en las que aparecen explícitamente los datos del enunciado sugiere que algunos (incluso, muchos) alumnos creen que los problemas numéricos que se les proponen se resuelven, necesariamente, combinando a través de un único cálculo los datos presentes en el enunciado: la respuesta es el resultado directo de dicho cálculo.

Esta creencia puede obstruir la posibilidad de diseñar una estrategia racional de resolución, e instala en su lugar la búsqueda de una combinación más o menos arbitraria de los datos disponibles, búsqueda en la cual el cálculo mismo parece más importante que su sentido y su relación con el contexto al que se refiere.

En el documento **Las pruebas de Matemática. Marco referencial**, el lector encontrará algunas orientaciones para intervenir didácticamente en la construcción de los conceptos probabilísticos por parte de sus alumnos, y algunas reflexiones acerca de la prevalencia distorsiva del cálculo en el Área de Matemática.

Sugerimos poner en relación didáctica las respuestas de los alumnos al ítem que comentamos, con las que en agosto de 1999 dieron al ítem siguiente:

26

En una bolsa hay cuatro bolillas blancas, tres rojas y tres azules. Se agita bien la bolsa y se sacan tres bolillas sin mirar: dos resultan blancas y una roja. Después se extrae otra bolilla, también sin mirar. ¿De qué color es más probable que sea?

- Blanca ◯ 1
- Roja ◯ 2
- Azul ◯ 3
- De cualquiera de los tres colores ◯ 4

La respuesta correcta (*opción c*) fue elegida por el 32,5 % de los alumnos; los *distractores a*, *b* y *d*, por el 9,5 %, el 10% y el 45%, respectivamente.

También en este caso se plantea una situación que se transforma, y en la que las probabilidades en la situación final dependen de la transformación sufrida por la situación inicial (una tabla similar a la que propusimos para el ítem del concurso de preguntas puede facilitar los análisis).

35

De lunes a viernes, un restaurante ofrece un menú compuesto por un plato principal (a elegir entre 4: pastas, carne de vaca, pescado o tarta de verdura) y un postre (a elegir entre 3: flan, ensalada de fruta o torta).

Los dueños, Alberto y Frida, quieren que el fin de semana se dupliquen las opciones en materia de menú.

Para eso, Alberto propone ofrecer los mismos platos principales, y dos postres más; Frida propone ofrecer cuatro platos principales más y los mismos postres.

Para duplicar durante el fin de semana la cantidad de menúes disponibles de lunes a viernes

a) ni la propuesta de Alberto ni la de Frida son adecuadas.
b) sólo la propuesta de Alberto es adecuada.
c) sólo la propuesta de Frida es adecuada.
d) las dos propuestas son adecuadas.

Este ítem del eje Nociones de Estadística y Probabilidad y de la dimensión Procesos cognitivos evalúa si dada una situación de análisis combinatorio (producto cartesiano) los alumnos son capaces de evaluar cuál es la modificación en el número de elementos de uno de los conjuntos que produce un efecto buscado.

En el caso que nos ocupa, el efecto deseado es duplicar durante el fin de semana la cantidad de menúes disponibles de lunes a viernes; para lograrlo, se propone modificar el número de platos principales o el número de postres.

Con sólo el 23 % de respuestas correctas (las que se adscriben a la *opción c*), es el ítem del eje con menor porcentaje de aciertos.

El 25 % de los alumnos elige el *distractor a;* el 20 %, el *distractor b;* y el 25 %, el *distractor d.*

Como se puede apreciar, las cuatro alternativas de respuesta resultan casi igualmente atractivas para los alumnos.

En la resolución del problema interviene la multiplicación entendida como combinación o producto cartesiano: en ese sentido, el problema tiene estructura multiplicativa.

Sin embargo, algunos alumnos suelen atribuir estructura aditiva a este tipo de problemas; con esa lógica, los platos principales y los postres son tratados como comidas independientes, y no como partes de menúes: por ejemplo, en lugar de combinar en 12 menúes los 4 platos principales con los 3 postres que el restaurante ofrece de lunes a viernes (12 = 4 . 3), se los considera como 7 comidas diferentes (7 = 4 + 3).

En otras palabras: estos alumnos no combinan entre sí los dos conjuntos en juego (el de los platos principales y el de los postres), no forman pares plato principal/postre, no calculan el cardinal del producto cartesiano, sino que consideran a dichos conjuntos independientemente, los unen y calculan el cardinal de la unión (recordemos que, en este caso, el cardinal de un conjunto es el número de elementos del mismo).

Cuando los alumnos que en 2001 fueron evaluados en Noveno Año lo fueron en agosto de 1999 en Séptimo Año, resolvieron el ítem que se reproduce a continuación:

27

Juan quiere almorzar una ensalada y un postre. Le ofrecen 4 tipos de ensalada y 3 postres diferentes.

¿Qué cuenta debe hacer para calcular cuántas posibilidades distintas tiene de combinar el menú?

- 4 + 3 ◯ 1
- 4 . 3 ◯ 2
- 4 – 3 ◯ 3
- 4 : 3 ◯ 4

El 32,5 % de los alumnos optó por la respuesta correcta (*opción b*), mientras que un porcentaje mayor, el 39,5 %, se inclinó por el *distractor a*. Esta distribución de respuestas revela la tendencia a considerar en términos aditivos un problema de índole multiplicativa.

Veamos cómo la hipótesis de que tal tendencia está presente aun entre los alumnos de Noveno Año puede explicar en parte la distribución de respuestas en 2001.

Según la propuesta de Alberto, la oferta de fin de semana incluiría 4 platos principales (los mismos que se ofrecen de lunes a viernes) y 5 postres (2 más de los que se ofrecen de lunes a viernes), esto es, con lógica aditiva (errónea), 9 comidas diferentes (en verdad, son 20 menúes distintos).

Según la propuesta de Frida, la oferta de fin de semana incluiría 8 platos principales (4 más de los que se ofrecen de lunes a viernes) y 3 postres (los mismos que se ofrecen de lunes a viernes); en clave aditiva (incorrecta), 11 comidas diferentes (razonando correctamente, la oferta es de 24 menúes diferentes: la propuesta de Frida permite duplicar durante el fin de semana la cantidad de menúes disponibles de lunes a viernes).

Ni 9 ni 11 constituyen el doble de 7 (la cantidad de menúes que según la misma lógica aditiva se ofrece de lunes a viernes), por lo que se concluye que, tal como indica el *distractor a*, ni la propuesta de Alberto ni la de Frida son adecuadas para lograr la duplicación buscada. [7]

Pero hay más: siguiendo con la lógica aditiva, con la propuesta de Alberto se consigue ofrecer durante el fin de semana 2 menúes más que de lunes a viernes. Una comprensión deficiente de la idea de "doble" y "duplicar" que la asimile y la confunda con "2 más", puede haber conducido a algunos alumnos a elegir el *distractor b,* vale decir, a juzgar adecuada la propuesta de Alberto.

En cuanto al *distractor d,* tal vez optan por él aquellos alumnos que ante la imposibilidad de cuantificar con precisión las propuestas, sólo evalúan, más cualitativa que cuantitativamente, que ambas aumentan la oferta de menúes para el fin de semana –con independencia de que ese aumento sea exactamente una duplicación–.

Estos resultados sugieren la conveniencia de abordar en las aulas de Tercer Ciclo problemas multiplicativos de combinación o producto cartesiano, y de proveer a los alumnos de herramientas y recursos de resolución tales como diagramas de árbol o de flechas, y tablas de doble entrada.

4. Logros y dificultades de los alumnos

A modo de síntesis, en este apartado procuramos identificar los principales logros y dificultades de los alumnos en las pruebas.

¿Qué entendemos por principales logros y dificultades de los alumnos?

En este contexto, definimos como logros las habilidades evaluadas por los ítems que alcanzaron mayores porcentajes de respuestas correctas. Se seleccionaron como indicadores de logro aquellos ítems a los que respondió correctamente como mínimo un 48 % de los alumnos.

Se consideran como principales dificultades, a su vez, las habilidades evaluadas por los ítems que contaron con menores porcentajes de respuestas correctas; se seleccionaron, en este caso, los que obtuvieron respuestas correctas de parte de menos de un 24 % de los alumnos.

[7] El análisis estadístico del ítem revela que este distractor atrae al 36 % de los alumnos que conforman el tercio de los que obtienen los puntajes más altos en la prueba, y al 18 % de los alumnos que conforman el tercio de los que obtienen los puntajes más bajos (relación 2 a 1). O sea, el distractor es más atractivo para los alumnos que puntúan relativamente alto que para aquellos que puntúan relativamente bajo.

La respuesta correcta es elegida por el 24 % de los alumnos del grupo de más alto puntaje, y por el 20 % de los del grupo de más bajo puntaje (relación 6 a 5).

Los otros dos distractores son más elegidos por los alumnos de bajo puntaje que por los de alto puntaje.

LOGROS	DIFICULTADES
✓ Usar números enteros en contextos significativos. ✓ Indicado un procedimiento de plegado y corte de una hoja, identificar, mediante acciones mentales, el diseño obtenido. ✓ Evaluar afirmaciones acerca de la relación de desigualdad entre elementos de Z^- y de Z^+. ✓ Identificar el "plano de cimientos" de una construcción tridimensional a partir de su representación bidimensional. ✓ Reconocer la expresión decimal de una fracción. ✓ Detectar regularidades para componer relaciones desfasadas.	✓ Dada una situación de análisis combinatorio (producto cartesiano), evaluar cuál es la modificación en el número de elementos de uno de los conjuntos que produce un efecto buscado. ✓ Conocidos el radio y la altura de un cilindro, determinar las dimensiones del rectángulo que constituye su cara curva. ✓ A partir de una secuencia de dibujos, descubrir la regularidad que permite anticipar las propiedades de un término avanzado de la secuencia. ✓ Evaluar qué modificación en las dimensiones de un cuerpo (prisma rectangular recto) produce determinado impacto en su volumen.

5. Consideraciones finales

Una de las posibilidades que ofrece un sistema de evaluación de las características del sistema bonaerense es la de disponer de perspectivas generales que trascienden la del aula o la de la propia institución y que por eso se convierten en referencias útiles con las cuales confrontar estas últimas.

Para ello, a lo largo del presente documento, hemos señalado y comentado las tendencias que se registran en las respuestas de los alumnos evaluados: **contar con un cuadro de situación más amplio permite reconocer logros específicos y dificultades particulares**.

Asimismo, la incorporación de referencias a los logros y las dificultades de los alumnos en distintos momentos (1999, 2001) –otra de las posibilidades del sistema– **enriquece y complejiza los procesos de reflexión**.

Al mismo tiempo, los análisis que el documento plantea pueden sugerir análisis similares sobre la información originada en un contexto más puntual (la sección, la institución).

En otras palabras: **las líneas de análisis que seguimos pueden transferirse a otros niveles de agregación de la información, y generar en las escuelas procesos de discusión e intercambio** a través de los cuales se intente ensayar hipótesis interpretativas y explicativas que tomen en cuenta el contexto específico de cada institución.

Tampoco es impensable transferir el tipo de análisis que hemos presentado, a las situaciones de evaluación que el propio docente promueve en el aula: detectar tendencias en las respuestas de los alumnos, agrupar y clasificar dichas respuestas, descubrir la lógica que les subyace, son procesos que pueden aportar datos y claves para ratificar o rectificar rumbos pedagógicos.

Recabar información, procesarla, comprender, decidir... configuran un circuito continuo de mejora y profesionalización que se sustenta en la confianza de que cada actor del sistema educativo puede, desde su posición, aportar en dirección a los cambios deseables.

La Plata, diciembre de 2001

Los documentos que corresponden al Área de Matemática son .....

Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires
Dirección Provincial de Planeamiento y Evaluación de la Calidad Educativa